Contrastes entre Geometria Riemanniana e Lorentziana

Ivo Terek Couto

The Ohio State University, Columbus

30 de Setembro de 2020

Estes slides estão disponíveis em
https://www.asc.ohio-state.edu/terekcouto.1/texts/palestra_IFCE.pdf

Motivação zero

Se tivermos dois eventos p e q e consideramos o vetor $\boldsymbol{v} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t)$ que os conecta no "espaço-tempo", e usando unidades para as quais a velocidade da luz é 1, temos:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2 < 1$$

e portanto: $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (\Delta t)^2 < 1$.

Definição

O *espaço de Lorentz-Minkowski* é o espaço $\mathbb{R}^n$ equipado com o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ definido por

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_L = x_1 y_1 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n.$$

Escrevemos $\mathbb{L}^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$.

$\langle\cdot,\cdot\rangle_L \not> 0!$

O produto $\langle\cdot,\cdot\rangle_L$ não é mais positivo-definido!

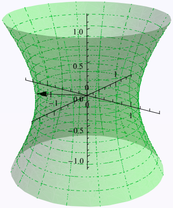
Definição (Caráter Causal)

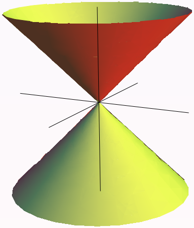
Um vetor não-nulo $v \in \mathbb{L}^n$ é de:

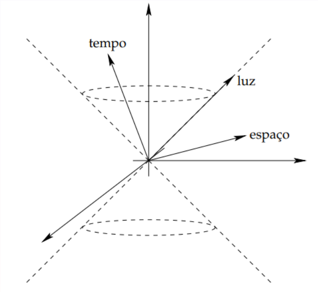
1. *tipo espaço* se $\langle v, v\rangle_L > 0$;
2. *tipo tempo* se $\langle v, v\rangle_L < 0$;
3. *tipo luz* se $\langle v, v\rangle_L = 0$;

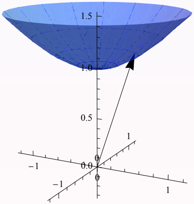
Para identificar estes vetores, façamos $n = 3$ e analisemos as superfícies de nível de $x^2 + y^2 - z^2 = c$.

- Se $c > 0$, um hiperboloide de uma folha;
- Se $c < 0$, um hiperboloide de duas folhas;
- Se $c = 0$, um cone (chamado *cone de luz*).


1.0
0.5
−0.5
−1.0

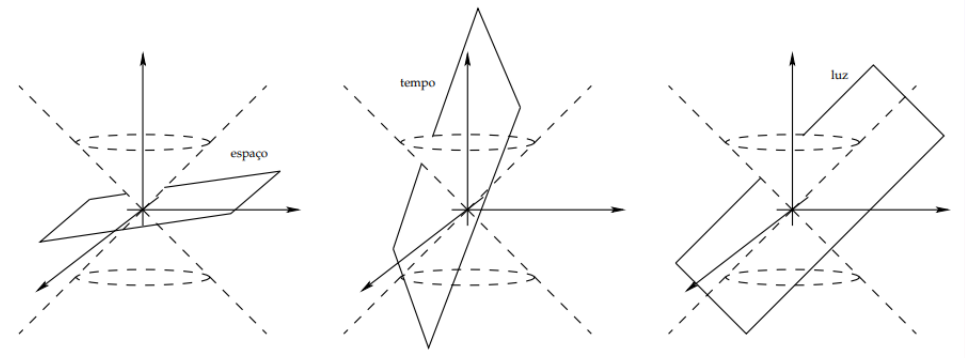



tempo
luz
espaço


1.5
1.0
0.5

Tipos de subespaços

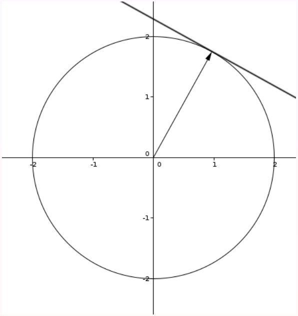
A noção de caráter causal é generalizada para outros objetos geométricos, como subespaços de $\mathbb{L}^n$. Para $n = 3$, temos:

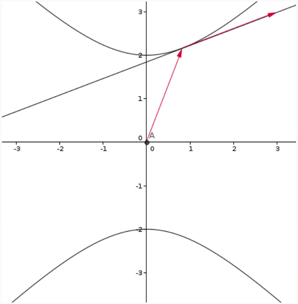


Ortogonalidade

E como fica a ortogonalidade relativa ao produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$?

Isto é fácil de entender se você lembrar que na geometria Euclideana, qualquer reta passando pelo centro de um círculo o cruza ortogonalmente:





Proposição (Uma pequena bizarrice)

Dois vetores de tipo luz em $\mathbb{L}^n$ são ortogonais se e somente se são proporcionais.

Demonstração:

Fixe um vetor de tipo tempo unitário $\mathbf{u} \in \mathbb{L}^n$ (por exemplo, o vetor canônico $\mathbf{u} = (0, \ldots, 0, 1)$) e escreva $\mathbb{L}^n = \mathbf{u}^\perp \oplus \mathbb{R}\mathbf{u}$. Escreva os vetores de tipo luz e ortogonais $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{L}^n$ como

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + a\mathbf{u} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_0 + b\mathbf{u}.$$

Daí $\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_0 \rangle_L = a^2$, $\langle \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{w}_0 \rangle_L = ab$ e $\langle \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{w}_0 \rangle_L = b^2$.

Logo $\langle b\boldsymbol{v}_0 - a\boldsymbol{w}_0, b\boldsymbol{v}_0 - a\boldsymbol{w}_0 \rangle_L = 0$. Mas $b\boldsymbol{v}_0 - a\boldsymbol{w}_0$ é de tipo espaço, logo deve ser o vetor nulo $\mathbf{0}$.

Segue que $b\boldsymbol{v} - a\boldsymbol{w} = \mathbf{0}$ também. $\square$

$O(n,\mathbb{R})$ versus $O_1(n,\mathbb{R})$

Em geral, é importante entender quais as transformações que preservam o produto escalar que estamos usando.

- Se $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é tal que $\langle A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w}\rangle_E = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle_E$ para todos $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$, então A é uma *transformação ortogonal*. Por exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Se $\Lambda\colon \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}^n$ é tal que $\langle \Lambda\boldsymbol{v}, \Lambda\boldsymbol{w}\rangle_L = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle_L$ para todos $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{L}^n$, então Λ é uma *transformação de Lorentz*. Por exemplo:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\varphi & \operatorname{senh}\varphi \\ \operatorname{senh}\varphi & \cosh\varphi \end{pmatrix}$$

(Bônus: preservar o produto *automaticamente* implica linearidade!)

Tipos de curvas

O tipo causal de uma curva $\alpha\colon I \to \mathbb{L}^3$ é definido a partir do tipo causal dos seus vetores velocidade $\alpha'(t)$.
Interpretações:

- curvas de tipo tempo representam linhas de universo de partículas com massa positiva;
- curvas de tipo luz representam trajetórias de partículas sem massa, como prótons ou neutrinos.
- curvas de tipo espaço representariam velocidades maiores que a da luz, e portanto não tem significado físico explícito.

Isto nos dá uma intuição para o fato de que enquanto toda curva em $\mathbb{R}^3$ admite uma reparametrização com velocidade unitária, isto é impossível para curvas de tipo luz em $\mathbb{L}^3$.

Comprimentos e parâmetros "bons"

Para curvas de tipo espaço temos um comprimento de arco, e para curvas de tipo tempo temos o seu *tempo próprio*:

$$\mathrm{L}[\boldsymbol{\alpha}] = \int_{\mathrm{I}} \sqrt{\langle \boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}'(t)\rangle_{\mathrm{L}}}\, dt \quad \text{e} \quad t[\boldsymbol{\alpha}] = \int_{\mathrm{I}} \sqrt{-\langle \boldsymbol{\alpha}'(t), \boldsymbol{\alpha}'(t)\rangle_{\mathrm{L}}}\, dt$$

Para curvas de tipo luz com $\boldsymbol{\alpha}''(t)$ sempre de tipo espaço, há o parâmetro de *arco-fóton*, tal que $\|\boldsymbol{\alpha}''(\phi)\|_{\mathrm{L}} = 1$.

Assim, é possível prosseguir com a Teoria de Curvas.

O Teorema Fundamental das Curvas — redux

A curvatura κ e a torção τ completamente classificam curvas (regulares) em $\mathbb{R}^3$ a menos de movimentos rígidos, e também a maioria das curvas em $\mathbb{L}^3$.

Mas para curvas em $\mathbb{L}^3$ com plano osculador de tipo luz isto não é possível, pois nem temos um referencial de Frenet adaptado à curva! Por outro lado, há um referencial não-ortonormal adaptado a tais curvas que as caracteriza com um *único* invariante б!

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon\eta\kappa & 0 & \tau \\ 0 & \varepsilon\tau & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \text{б} & 0 & 1 \\ 0 & \text{б} & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \text{б} & 0 \\ 1 & 0 & -\text{б} \end{pmatrix}$$

α: admissível luz semi-luz

($\varepsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ dependem do tipo de α)

Superfícies em $\mathbb{L}^3$

O tipo causal de uma superfície $S \subseteq \mathbb{L}^3$ é definido a partir do tipo causal dos seus planos tangentes $T_{\mathbf{p}}S$.

Para superfícies *não-degeneradas*, temos todos os conceitos clássicos:

- Primeira Forma Fundamental: I;
- Segunda Forma Fundamental: II;
- Aplicação de Gauss: $\mathbf{N}$;
- Mapa de Weingarten: $-\mathrm{d}\mathbf{N}$;
- Curvaturas média e Gaussiana: H e K;
- Teorema de Bonnet: classificação de superfícies via equações de compatibilidade;
- Superfícies mínimas/máximas: $H = 0$ ("críticas").

Representação de Weierstrass

No estudo de superfícies minimas em $\mathbb{R}^3$, é comum identificar os domínios de parametrizações de uma superfície com subconjuntos abertos de $\mathbb{C}$.

Assim, uma parametrização $\boldsymbol{x}\colon U \to \boldsymbol{x}[U] \subseteq S$ é vista como uma função $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(z, \bar{z})$.

Adotando este ponto de vista e usando técnicas da análise complexa, pode-se mostrar que toda superfície mínima é localmente representada por uma tripla de funções holomorfas (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) tais que $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$.

Propriedades geométricas da superfície são deduzidas dos *dados de Weierstrass* (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3).

E em $\mathbb{L}^3$?

$\mathbb{C}$ versus $\mathbb{C}'$

Se $S \subseteq \mathbb{L}^3$ é uma superfície de tipo espaço, tudo funciona como antes e obtemos dados de Weierstrass holomorfos (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) com $\phi_1^2 + \phi_2^2 - \phi_3^2 = 0$.

Se $S \subseteq \mathbb{L}^3$ é de tipo tempo, precisamos substituir $\mathbb{C}$ pelo anel dos *números para-complexos* $\mathbb{C}' = \{a + hb \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } h^2 = 1\}$ e lidar com dados de Weierstrass para-holomorfos.

- divisores de zero em $\mathbb{C}'$ correspondem aos raios de luz em $\mathbb{L}^2$;
- para-holomorfia $\neq$ para-analiticidade (nada de séries);
- equações de Cauchy-Riemann revisadas: $u_x = v_y$ e $u_y = v_x$;
- sem Fórmula Integral de Cauchy;
- sem Teorema de Liouville;
- a parte real u de uma função para-holomorfa satisfaz $\Box u = 0$ ao invés de $\triangle u = 0$.

Problemas de Björling

Representações de Weierstrass são uma ferramenta importante utilizada na resolução do chamado *problema de Björling*, cujo enunciado é simples:

"*Dada uma curva* $\boldsymbol{\alpha}\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ *e um campo de vetores unitários* $\mathbf{V}\colon \mathrm{I} \to \mathbb{R}^3$ *ao longo de* $\boldsymbol{\alpha}$ *e ortogonal à* $\boldsymbol{\alpha}$*, existe uma superfície mínima* $\mathbf{x}\colon \mathrm{I} \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ *com* $\mathbf{x}(t, 0) = \boldsymbol{\alpha}(t)$ *e* $\mathbf{N}(t, 0) = \mathbf{V}(t)$ *para todo* $t \in \mathrm{I}$*?*"

Tal superfície existe e é única. Mas em $\mathbb{L}^3$, o tipo causal de $\boldsymbol{\alpha}$ passa a importar! Variantes do problema de Björling em outros espaços ambiente, Riemannianos ou Lorentzianos, ou em dimensão maior, *são pesquisados até hoje*.

Hora de trocarmos de marcha!

O show continua!

Variedades Lorentzianas

Definição

Uma *métrica Lorentziana* em uma variedade diferenciável M é uma escolha suave de produtos escalares Lorentzianos g_x em cada espaço tangente T_xM. O par (M, g) é chamado uma *variedade Lorentziana*.

Definição

Uma métrica Lorentziana em uma variedade diferenciável M é *temporavelmente orientável* se existe um campo de vetores de tipo tempo $\mathbf{V}$ globalmente definido em M. Uma variedade Lorentziana conexa (M, g) com g temporalmente orientada é dita um *espaço-tempo*.

Primeiras diferenças

Toda variedade diferenciável admite métricas Riemannianas.

Mas há obstruções *topológicas* para a existência de métricas Lorentzianas!

Teorema

Dada uma variedade diferenciável M, são equivalentes:

1. M *admite uma métrica Lorentziana;*
2. M *admite uma métrica Lorentziana temporalmente orientável;*
3. M *admite um campo de vetores que nunca se anula;*
4. M *é não-compacta ou* $\chi(M) = 0$.

Demonstração (de mentirinha)

(i) $\Longrightarrow$ (ii): sutil.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): $\ddot\smile$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): $\ddot\smile$

(iii) $\Longleftrightarrow$ (iv): Topologia Algébrica.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii): Fixe uma métrica Riemanniana $\mathtt{h}$ em M e um campo de vetores $\mathbf{X}$ que nunca se anula. Então

$$g_x(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) = \mathtt{h}_x(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) - 2\frac{\mathtt{h}_x(\boldsymbol{v},\mathbf{X}_x)\mathtt{h}_x(\boldsymbol{w},\mathbf{X}_x)}{\mathtt{h}_x(\mathbf{X}_x,\mathbf{X}_x)}$$

define uma métrica Lorentziana em M para a qual $\mathbf{X}$ é de tipo tempo. $\square$

Independência de orientabilidades

A orientabilidade "espacial" de uma variedade M é completamente independente da orientabilidade temporal que qualquer métrica Lorentziana que M eventualmente possua.

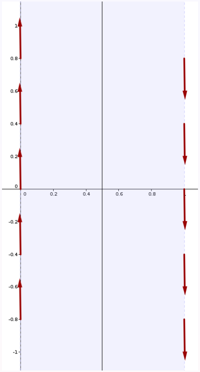
Exemplo

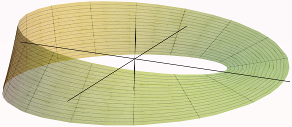
Em $\mathbb{R}^2$, considere a métrica Lorentziana

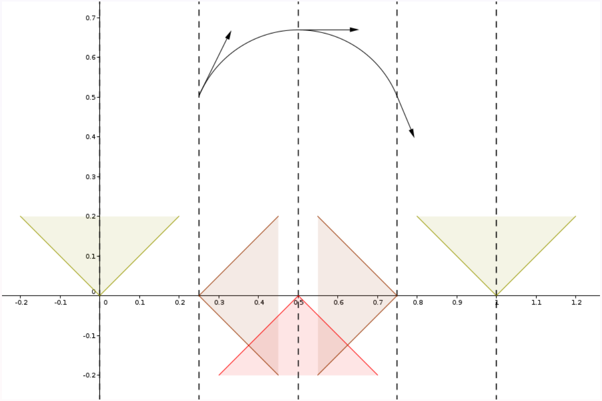
$$g_{(x,y)} = \cos(2\pi x)(dx^2 - dy^2) - 2\,\mathrm{sen}(2\pi x)\,dx\,dy.$$

Esta métrica é temporalmente orientável com (uma possível) seta do tempo dada por $\mathbf{X}_{(x,y)} = (\mathrm{sen}(\pi x), \cos(\pi x))$. Como temos $g_{(0,y)} = -g_{(1/2,-y)}$ e os cones de luz de $\mathbb{L}^2$ são rotacionados... esta métrica passa para o quociente, definindo uma métrica Lorentziana temporavelmente orientável em uma *faixa de Möbius*.

Girando os cones de luz em $\mathbb{L}^2$







A escada causal

A causalidade de (M, g) influencia sua geometria e topologia.

Definição

Um espaço-tempo (M, g) é:

1. *cronológico*, se não admite curvas de tipo tempo fechadas;
2. *causal*, se não admite curvas de tipo tempo ou luz fechadas;
3. *estavelmente causal*, se existe $\tau \colon M \to \mathbb{R}$ que é estritamente crescente ao longo de curvas de tipo tempo ou luz;
4. *globalmente hiperbólico*, se cada diamante causal é um subconjunto compacto de M.

Cada uma das condições acima implica a próxima, mas *todas* as recíprocas falham!

Mergulhos

Teorema (Whitney)

Toda variedade diferenciável M admite um mergulho suave em $\mathbb{R}^N$, para algum N grande o suficiente.

Teorema (Nash)

Toda variedade Riemanniana (M, g) admite um mergulho isométrico em $\mathbb{R}^N$, para algum N grande o suficiente.

Teorema (Müller-Sánchez, 2008)

Um espaço-tempo estavelmente causal (M, g) admite um mergulho isométrico em $\mathbb{L}^N$, para algum N grande o suficiente, se e somente se admite uma função temporal τ íngreme (i.e., $g(\nabla\tau, \nabla\tau) \leqslant -1$).

Viagem no tempo

Proposição (Mais uma bizarrice)

Nenhum espaço-tempo compacto é cronológico.

Demonstração:

Para cada evento $p \in M$, o futuro cronológico

$$I^+(p) = \left\{ q \in M \mid \begin{array}{l} \text{existe uma curva de tipo tempo} \\ \text{futuro-dirigida de } p \text{ a } q \end{array} \right\}$$

é aberto em M. Por compacidade podemos extrair uma subcobertura finita de $\{I^+(p)\}_{p \in M}$: digamos, $I^+(p_1), \ldots, I^+(p_r)$. Por exaustão, $p_i \in I^+(p_i)$ para algum i, e temos um *loop* de tipo tempo em p_i. $\square$

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana, definimos $d_g(p, q)$ como o ínfimo dos comprimentos de curvas ligando p a q. Assim, vale que (M, d_g) é um espaço métrico.

Teorema (Hopf-Rinow)

Uma variedade Riemanniana (M, g) é geodesicamente completa se e somente se (M, d_g) é um espaço métrico completo. Neste caso, dados quaisquer dois pontos em M, existe uma geodésica minimizante os unindo.

Isto falha miseravelmente no caso Lorentziano! Por vários motivos.

- Não temos mais d_g.
- Há um tipo de completude geodésica para cada tipo causal, e são todas independentes.
- Pior ainda, compacidade não implica completude.

Exemplo (Clifton-Pohl)

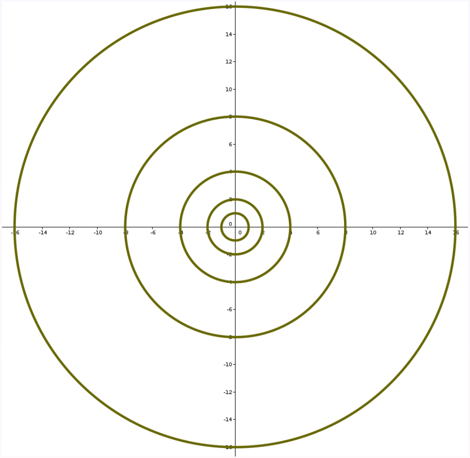
Em $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, considere a métrica Lorentziana

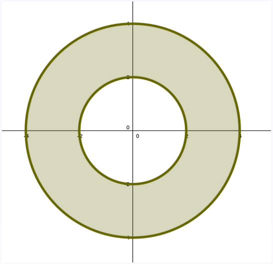
$$g = \frac{2\,dx\,dy}{(x^2+y^2)}.$$

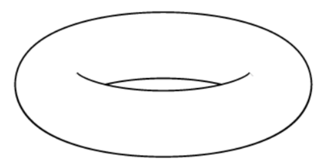
A ação $\mathbb{Z} \circlearrowright M$ dada por $n \cdot (x,y) = (2^n x, 2^n y)$ é propriamente descontínua e consiste de isometrias. Daí g induz uma métrica Lorentziana no quociente $\mathbb{T}^2 = M/\mathbb{Z}$ (compacto!) que não é geodesicamente completa, pois (M,g) não o é.

Observação

- Toda geodésica de tipo luz em $\mathbb{T}^2$ é incompleta, mas as de tipo tempo ou espaço podem ser completas ou não.
- $\chi(M) = 2 - 2g = 0 \iff g = 1$.


14
12
10
6
0
-6
-10
-12
-14
-14
-12
-10
-6
0
6
10
12
14


0
0



Há salvação para um espaço-tempo (M, g)?

Definimos $t(p, q)$ como o supremo dos tempos próprios das curvas de tipo tempo ligando p a q. Mas se $q \notin I^+(p)$ isto não está definido! E pode até ocorrer $t(p, p) = +\infty$!

Não há como (M, t) ser um espaço métrico. Mas...

Teorema (Avez-Seifert)

Se (M, g) *é um espaço-tempo globalmente hiperbólico e* $q \in I^+(p)$, *existe uma curva de tipo tempo futuro-dirigida com* $t[\alpha] = t(p, q)$, *e* t *é finita e contínua.*

E qual a moral da história?

Geometria Lorentziana é uma área muito rica cujo estudo requer:

- Geometria Diferencial
- Topologia (Algébrica)
- Análise Complexa
- Equações Diferenciais Parciais
- Um pouco de Física
- ... e muito mais!

Obrigado pela atenção!

- I.T.C.